1. MENGEN

GEORG CANTOR (~1900) versuchte, ein sauberes Fundament für die Mengenlehre zu schaffen.

„Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen.“

<u>Problem</u>: Der Begriff „Menge“ wird zurückgeführt auf andere nicht definierte schwammige Begriffe.

Und in der Tat: Wir betrachten mal die Menge M derjenigen Mengen, die nicht Objekt von sich selbst sind. Frage: Ist M ein Objekt von sich selbst oder nicht?

$\rightarrow$ Stets ergibt sich ein Widerspruch!

Es stellt sich heraus, daß man <u>nicht</u> definieren sollte, was eine Menge ist.
Die moderne Mengenlehre ist daher ein Formalismus, der regelt, was mit Mengen gemacht werden darf.

<u>Pragmatischer</u> Standpunkt zu Studienbeginn: Wir betrachten etwas als <u>Menge</u>, wenn wir zu jedem Objekt klar entscheiden können, ob es in der Menge drin ist oder nicht.
Die Objekte a einer Menge M heißen <u>Elemente</u> der Menge; schreibe $a \in M$.
(bzw. $a \notin M$, falls a nicht Objekt in M)

Mengenklammern: $\{1,2,3,4,6,8\}$, $\{a,e,i,o,u\}$, $\{\triangle, \circ, \square\}$

$\{x \mid x \text{ ist ein dreibeiniger Hund}\}$

1.1. Bsp.

$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen = $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen = $\{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen = $\{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, b \neq 0\}$

$\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen

$= \{ \pm \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \dots \mid n \in \mathbb{N}, \ \alpha_k \in \{0, \dots, 9\} \text{ für jedes } k \}$

1.2. Bemerkg. (a) $-1 \in \mathbb{Z}$ aber $-1 \notin \mathbb{N}$

$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ aber $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Dazu: $\sqrt{2}$ sei die positive reelle Zahl x mit $x^2 = 2$ (Existenz: Ana 1)

Ann $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$

Dann: $b^2 \cdot 2 = a^2 \Rightarrow a^2$ gerade $\Rightarrow a$ gerade, $a = 2c$

$\Rightarrow 2c^2 = b^2 \Rightarrow b^2$ gerade, b gerade

Nun: Wir können zu Beginn die Darstellung $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ in gekürzter Form wählen. Daraus folgt dann ein Widerspruch.

Somit: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

(b) Beachte: Die Darstellung rationaler Zahlen ist nicht eindeutig.

Bsp. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

Ebenso bei reellen Zahlen: $0.9999\dots = 1.00\dots$

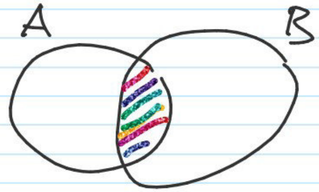
1.3 **Def** Seien A und B Mengen.

(1) A heißt *Teilmenge* von B, falls aus $a \in A$ stets folgt $a \in B$.

Schreibe: $A \subseteq B$

Beachte: $A = B$ genau dann wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$

(2) $\emptyset$ sei die *leere Menge*, d.h. die Menge ohne Elemente.



(3) *Durchschnitt*: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$

Vereinigung: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$

($x \in A \cup B$ kann auch in A *und* B liegen)

Allgemeiner: Sei $I \neq \emptyset$ und M_i $(i \in I)$ Mengen.

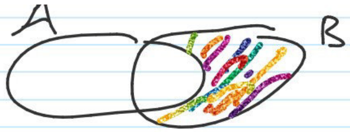
Dann: $\bigcap_{i \in I} M_i = \{x \mid x \in M_i \text{ für } \textit{jedes } i \in I\}$

$\bigcup_{i \in I} M_i = \{x \mid x \in M_i \text{ für (mindestens) ein } i \in I\}$

Bsp. I = Menge aller Primzahlen

$M_p = p \cdot \mathbb{Z} = \{p \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ für jede Primzahl $p \in I$

Dann: $\mathbb{Z} = \left(\bigcup_{p \in I} p \cdot \mathbb{Z}\right) \cup \{1, -1\}$, $\bigcap_{p \in I} p\mathbb{Z} = \{0\}$

(4) Differenzmenge $B \setminus A = \{x \in B \mid x \notin A\}$ 

(5) Disjunkte Vereinigung: $A \dot{\cup} B$ bedeutet: $A \cup B$ mit $A \cap B = \emptyset$

1.4. Satz Rechengesetze für Mengen:

(1) Kommutativgesetze: $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$

(2) Assoziativgesetze: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) Distributivgesetze: $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup M_i)$ und $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap M_i)$

(4) DE MORGANsche Regeln:

$$A \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \setminus M_i), \quad A \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \setminus M_i)$$

Beweis. (1) und (2) direkt aus logischen Begriffen „und" und „oder"

(3) „$\subseteq$": Sei $x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right)$. $\Rightarrow$ $x \in A$ oder $x \in \bigcap_{i \in I} M_i$

$\Rightarrow$ $x \in A$ oder ($x \in M_i$ für jedes $i \in I$)

Somit gilt für jedes $i \in I$: $x \in A$ oder $x \in M_i$ $\Rightarrow$ für jedes $i \in I$: $x \in A \cup M_i$

Somit $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup M_i)$

(4) DE MORGANsche Regeln:

$$A \setminus \Big(\bigcup_{i\in I} M_i\Big) = \bigcap_{i\in I} (A\setminus M_i), \qquad A \setminus \Big(\bigcap_{i\in I} M_i\Big) = \bigcup_{i\in I} (A\setminus M_i)$$

Beweis. (1) und (2) direkt aus logischen Begriffen „und" und „oder"

(3) „$\subseteq$": Sei $x\in A\cup\big(\bigcap_{i\in I} M_i\big)$. $\Rightarrow$ $x\in A$ oder $x\in \bigcap_{i\in I} M_i$

$\Rightarrow$ $x\in A$ oder ($x\in M_i$ für jedes $i\in I$)

Somit gilt für jedes $i\in I$: $x\in A$ oder $x\in M_i$ $\Rightarrow$ für jedes $i\in I$: $x\in A\cup M_i$

Somit $x\in \bigcap_{i\in I}(A\cup M_i)$

„$\supseteq$": Sei $x\in \bigcap_{i\in I}(A\cup M_i)$ $\Rightarrow$ für jedes $i\in I$: $x\in A\cup M_i$ $\Rightarrow$ für jedes i: $x\in A$ oder $x\in M_i$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{1. Fall } x\in A & \Rightarrow x\in A\cup\big(\bigcap_{i\in I} M_i\big) \\ \text{2. Fall } x\notin A & \Rightarrow \text{für jedes } i\in I:\ x\in M_i \end{array}\right\} \Rightarrow x\in A\cup\Big(\bigcap_{i\in I} M_i\Big)$$

(4) „$\subseteq$": Sei $x\in A\setminus\big(\bigcup_{i\in I} M_i\big)$ $\Rightarrow$ $x\in A$ und $x\notin \bigcup_{i\in I} M_i$

$\Rightarrow$ $x\in A$ und ($x\notin M_i$ für jedes $i\in I$) $\Rightarrow$ $x\in (A\setminus M_i)$ für jedes $i\in I$

$\Rightarrow$ $x\in \bigcap_{i\in I}(A\setminus M_i)$

„$\supseteq$" Analog Gegenrichtung.

1.5. Etwas Logik

In der Mathematik werden nicht nur Objekte definiert und untersucht, sondern auch Aussagen über ihre Eigenschaften formuliert und versucht zu entscheiden, ob diese zutreffen (Beweis) oder nicht (Gegenbeispiel!)

Grundprinzip Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch.

Beweis bedeutet: Ableiten neuer wahrer Aussagen aus als bereits wahr erkannten Aussagen.

$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ bedeutet: Ist die Aussage $\mathfrak{A}$ wahr, so ist auch $\mathfrak{B}$ wahr.

In diesem Fall nennen wir $\mathfrak{A}$ eine hinreichende Bedingung für $\mathfrak{B}$
und $\mathfrak{B}$ eine notwendige Bedingung für $\mathfrak{A}$

Kurzschreibweisen $\neg\mathfrak{A}$: nicht $\mathfrak{A}$ $\quad$ $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$: $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ $\quad$ $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$: $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$

Wahrheitstafel

$\mathfrak{A}$	$\mathfrak{B}$	$\neg\mathfrak{A}$	$\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$
+	+	−	+	+	+
+	−	−	−	+	−
−	+	+	−	+	+
−	−	+	−	−	+

Sichtweise: $\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ entspricht $\mathfrak{B} \vee \neg\mathfrak{A}$

<u>Prinzip der Kontraposition</u> $\quad \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}$ und $\neg\mathfrak{B} \Rightarrow \neg\mathfrak{A}$ sind gleichwertig

<u>Beweis</u> $(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\mathfrak{B} \vee \neg\mathfrak{A}) \Leftrightarrow (\neg\mathfrak{A} \vee \neg\neg\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathfrak{B} \Rightarrow \neg\mathfrak{A})$

<u>Verneinungsregeln</u>

$$\left.\begin{array}{lll} \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) & \text{entspricht} & \neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B} \\ \neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) & \ldots\ldots & \neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B} \end{array}\right\} \text{ vgl. DE MORGAN}$$

$$\begin{array}{lll} \neg(\mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{B}) & \ldots\ldots & \neg\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{A} \\ \neg(\forall x: \mathfrak{A}(x)) & \ldots\ldots & \exists x: \neg\mathfrak{A}(x) \\ \neg(\exists x: \mathfrak{A}(x)) & \ldots\ldots & \forall x: \neg\mathfrak{A}(x) \end{array}$$

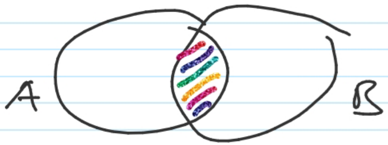
1.6. <u>Def.</u> Eine Menge M heiße <u>endlich</u>, wenn sie nur <u>endlich</u> viele Elemente enthält.

$|M|$ sei die Anzahl der Elemente in M (sog. <u>Mächtigkeit</u> von M)

1.7. <u>Bsp.</u> (1) $|\{0,1,\dots,n-1\}| = n$ für $n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{N}$ ist eine unendliche Menge

(2) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ und } n+2 \text{ sind Primzahlen}\}$ ist genau dann unendlich, wenn es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Dies ist bislang nicht geklärt.

(3) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



Wir wollen diese Formel auf mehr als zwei Mengen verallgemeinern.

1.8. <u>Beweisprinzip der vollständigen Induktion</u>

Es seien $\mathfrak{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ Aussagen. Ferner gelte:

(1) $\mathfrak{A}_0$ ist wahr

(2) für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathfrak{A}_n \Rightarrow \mathfrak{A}_{n+1}$ wahr.

Dann ist jedes $\mathfrak{A}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ wahr.

<u>Beweis</u> <u>Ann.</u> falsch. Wähle $m \in \mathbb{N}$ minimal bzgl. „$\mathfrak{A}_m$ falsch". Wegen (1) ist $m > 0$. Nach Wahl von m ist $\mathfrak{A}_{m-1}$ wahr. Wegen (2) ist dann auch $\mathfrak{A}_m$ wahr. # zur Wahl von m.

1.9. Satz Für jede natürliche Zahl n gilt $\quad 0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\mathcal{A}_n)$

$$\nearrow \sum_{k=0}^{n} k$$

Beweis Ind. Anfang: $n=0$: $\quad 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ ✓

Ind. Annahme: Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist bereits $0+1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Ind. Schritt: $n \to n+1$. z.z. Dann ist auch $0+1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Dazu: $$0+1+\dots+(n+1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ind. Ann}}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)(n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \quad ✓$$

1.10. Satz (Inklusions/Exklusions-Prinzip)

Es seien $M_1, \dots, M_n$ endliche Mengen. Dann gilt:

$$|M_1 \cup \dots \cup M_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_k} |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_k}|$$

speziell für $n=3$: $\quad |M_1 \cup M_2 \cup M_3| = |M_1| + |M_2| + |M_3| - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$

__Beweis__ Induktion nach n. $n=1$ trivial, $n=2$ bekannt.

__Ind. Ann.__ obige Formel gilt für ein festes $n \geq 2$.

__$n \to n+1$.__ __z.z.__ $|M_1 \cup \dots \cup M_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}|$

Dazu:

$$|M_{n+1} \cup (M_1 \cup \dots \cup M_n)| \overset{n=2}{=} |M_{n+1}| + |M_1 \cup \dots \cup M_n| - \underbrace{|M_{n+1} \cap (M_1 \cup \dots \cup M_n)|}_{\overset{1.4}{=} |(M_1 \cap M_{n+1}) \cup \dots \cup (M_n \cap M_{n+1})|}$$

Ind.Ann.

$$= |M_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \dots < i_k \leq n} |M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k}|$$

$$\underbrace{- \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}}_{(-1)^{k+2}} \sum_{i_1 < \dots < i_k} |M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_k} \cap M_{n+1}|$$

Die mittlere Summe erfasst alle $i_1 < \dots < i_k$ mit $i_k \leq n$

Die rechte Summe erfasst alle $i_1 < \dots < i_k < i_{k+1}$ mit $i_{k+1} = n+1$

Der erste Summand erfasst $i_{k+1} = n+1$

1.11. Def. Die <u>Potenzmenge</u> $\mathcal{P}(M)$ einer (beliebigen) Menge M sei die Menge aller Teilmengen von M.

1.12. Bsp. $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$; $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

1.13. Satz Für endliche Mengen M gilt stets $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$

Beweis Es sei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$

Wir wollen eine Teilmenge von M zusammenstellen und fragen jedes a_i, ob es drin sein will oder nicht. Jedes a_i hat zwei mögliche Antworten und entscheidet autonom.

$\Rightarrow$ Anzahl Möglichkeiten ist $\underset{\substack{\uparrow \\ a_1}}{2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a_2}}{2} \cdot 2 \cdot \underset{\dots}{\dots} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ a_n}}{2} = 2^n$

1.14. Def Es seien $M_1, \dots, M_n$ Mengen. Wir wählen Elemente $a_i \in M_i$ und bilden daraus ein sog. <u>n-Tupel</u> $(a_1, \dots, a_n)$. Anders als bei der Menge $\{a_1, \dots, a_n\}$ kommt es beim Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ auf die Reihenfolge der Einträge an, d.h.

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) \iff a_i = b_i \text{ für } 1 \le i \le n.$$

Das <u>kartesische Produkt</u> der Mengen $M_1, \dots, M_n$ sei die Menge

$$M_1 \times \dots \times M_n = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in M_i\}$$

Anstelle $\underbrace{M \times \dots \times M}_{n\text{-mal}}$ schreiben wir M^n.

1.15. Bsp

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \dots, \mathbb{R}^n, \dots$

(2) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0, \square\}$ $\Rightarrow$ $A \times B = \{(1,0), (2,0), (3,0), (1,\square), (2,\square), (3,\square)\}$

Klar: $A \times B \neq B \times A$

(3) Anschaulich:

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$